



EF

**MATE
MATIKA**

příručka učitele

HEJNÉHO METODA

Zasloužená radost z poznávání

OBSAH

Úvod	4	DÍL F	
Popis učiva a činností k výstupům dle RVP ZV v dílech E + F	8	Aritmetický průměr	112
Časově tematické plány	16	Dělitelnost	115
DÍL E		Čtyřúhelník	118
Obsah	22	Výrazy I	123
Odmocniny	24	Zlomky	124
Trojúhelník I	27	Nerovnice	127
Rovnice I	30	Oblé útvary	130
Množiny	32	Jednotky	133
Pravděpodobnost	34	Posloupnosti	135
Číselné výrazy	37	Mocniny a odmocniny	138
Tělesa	41	Oblá tělesa	140
Pavučiny	44	Celá a zlomková část čísla	144
Posunutí	46	Mnohoúhelníky	146
Jazyk písmen I	49	Jazyk písmen	149
Souměrnosti	53	Kvadratické výrazy	152
Procenta	56	Stejnolehlost	154
Otočení	59	Rovnice	157
Racionální čísla	61	Funkce	160
Práce s daty	65	Kombinatorika a pravděpodobnost	163
Dělitelnost I	67	Kvadratické rovnice I	167
Parkety	70	Úhel	170
Trojúhelník II	73	Práce s daty	174
Rovnice II	75	Kvadratické rovnice II	177
Kombinatorika	79	Výrazy II	178
Dělitelnost II	82	Co už víte	180
Podobnost	85		
Rovnice III	89	Rejstřík	181
Oblé útvary	92		
Mocniny a odmocniny	97		
Jazyk písmen II	100		
Konstrukce	103		
Lineární funkce	108		

Žádný princip není dogma

Chceme povzbudit učitele k tomu, aby vždy vnímali atmosféru ve třídě, zohledňovali potřeby žáků a aby se opakovaně zamýšleli nad příčinami chování žáků a svými výukovými nebo výchovnými cíli.

Někdy se stává, že máme tendenci používat obecnou *poučku* nebo *princip* na všechny situace bez ohledu na kontext. Například maminka nechce na své děti křičet. Potom se stane, že se její dítě rozběhne přes cestu, protože na druhé straně vidí babičku, a řítí se přímo pod kola jedoucího auta. Držet se v této situaci dogmaticky zásady nekřičet na dítě by odporovalo selskému rozumu. Nebyl by zohledněn kontext, ve kterém hrozí bezprostřední nebezpečí a kdy maminka už není tak blízko, aby dítě mohla fyzicky zastavit.

Podobně vnímáme i všechny principy a doporučení Hejného metody. Například ve třídě, kde jsou silně narušené vztahy, může být druhořadé, že teď „by měla“ proběhnout diskuze. Do popředí se dostane potřeba cítit se ve třídě bezpečně a učitel se rozhodne dát důraz například na práci s pravidly. Nadřadí je všem principům Hejného metody. V daném kontextu to může být smysluplnější než se snažit o dogmatické naplnění všech ostatních principů.

Dril vs. nácvik

K tomu, aby člověk automatizoval jistou činnost, je potřebný nácvik. Když se dítě učí chodit, je k této činnosti puzeo genetickou výbavou a opakovaně se o chůzi snaží, i když občas bolestivě upadne. Dítě má potřebu naučit se chodit a proto tento nácvik nepocituje jako zátěž, ale jako výzvu. Radostí je odměněn pak každý pokrok, kterého dosáhne.

Podobně je to se žákem, který má potřebu nácviku aritmetických spojů například při násobení desetinných čísel, sčítání zlomků, práci s procenty apod. Je dobře, když takový žák má dostatek úloh, na nichž může tuto svou potřebu uspokojovat.

Jinak je to ale se žákem, který potřebu nácviku nemá a který je k takové opakované činnosti nucen. Zde nemluvíme o nácviku, ale o drilu. Tedy hlavní rozdíl mezi

nácvikem a drilem spočívá v psychickém vnímání této činnosti žákem. Nácvik je dobrovolný a je spojen s pocity libými, dril je nátlakový a je spojen s pocity nelibými. Ty pak vedou k negativnímu vztahu žáka k opakování spojů, nejednou i k matematice vůbec.

Častý požadavek, že žák musí mít automatizované základní aditivní spoje, násobilku, počítání se zlomky nebo úpravu výrazů, je v době kalkulaček a počítačů anachronismus. Přesto se ale žák může k automatizaci těchto spojů dopracovat jinou cestou. Bude řešit numerické úlohy zaměřené k vyššímu cíli. Když například metodou pokus–omyl řeší součtové trojúhelníky, součtové čtverce nebo šipkové grafy, uskuteční obyčejně spoustu výpočtů, ale ty nejsou samoučelné, neboť směřují k vyřešení složitější úlohy.

Mnozí žáci čas od času potřebují nějakou činnost v matematice procvičit. Za ideální považujeme, pokud oni sami tuto potřebu cítí, uvědomují si, že slabá automatizace je brzdí při řešení náročnějších úloh. Málo motivovaní žáci postrádají potřebnou sebereflexi a tuto potřebu necítí, někdy jsou k matematice jako k celku „zcela otočení zády“. V takových případech se nám osvědčilo při potřebě něco procvičit dávat žákům možnost volby. Učitel například přinese k procvičení jak úlohy na sčítání zlomků, tak na procenta a každý žák si zvolí, co potřebuje více procvičit.

Interakce

Každá činnost, kterou lidé dělají ve skupině, závisí na mezilidských vztazích členů skupiny. Ať již je to v rodině, nebo ve fotbalovém týmu, v dílně, nebo hotelové kuchyni, všude se klima, které zde vládne, výrazně podílí na kvalitě produktu skupiny. Stejně je to i ve třídě. Klíčová je interakce učitel – třída a učitel – žák. Učitel, který plně respektuje žákovu osobnost, je vstřícný a přející, vede třídu k tomu, aby stejné vlastnosti měla i interakce mezi žáky. To neznamená, že učitel nemá autoritu. Autoritu má, ale tato není dána mocenskými nástroji, hrozbami a nátlakem. Autorita učitele vychází z jeho osobnosti, jeho mravních zásad a každodenního jednání.

Popis učiva a činností k výstupům dle RVP ZV v dílech E + F

Výstupy a kompetence RVP ZV

Naše očekávané výstupy – díly E + F

ČÍSLO A PROMĚNNÁ

M-9-1-01

Užívá rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě. Porovnává reálná čísla. Užívá ve výpočtech druhou a třetí mocninu a odmocninu. Sčítá, odčítá a dělí zlomky a desetinná čísla, počítá s odmocninami. Provádí aproximaci čísla druhá odmocnina ze dvou.

Užívá rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě. Rozlišuje čísla s konečným a nekonečným desetinným rozvojem, užívá pojmy perioda a předperioda. V rozšiřujícím učivu se seznamuje se celou a zlomkovou částí čísla. Porovnává reálná čísla. Užívá ve výpočtech druhou a třetí mocninu a odmocninu, počítá s odmocninami, provádí aproximaci čísla druhá odmocnina ze dvou i jiných odmocnin. Sčítá, odčítá, násobí a dělí zlomky a desetinná čísla.

M-9-1-02

Zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností a účelně využívá kalkulátor.

Provádí řádové odhady (propedeutika limity). Účelně využívá kalkulátor při výpočtech s reálnými čísly.

M-9-1-03

Modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel.

Odhaluje a používá kritéria dělitelnosti 6, 8, 11, 12. Využívá prvočíselný rozklad pro nalezení nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele více čísel. Seznamuje se s Euklidovým algoritmem.

M-9-1-04

Užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek a část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem a procentem).

Reálná čísla umísťuje na číselnou osu.

M-9-1-05

Řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů.

Řeší konstrukčně i výpočtem stejnolehlost útvarů.

M-9-1-06

Řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek).

Řeší aplikační úlohy na procenta z oblasti finanční matematiky.

Časově tematické plány

ČASOVÝ PLÁN běžné tempo	PROBÍRANÁ TÉMATA	UČEBNICE	PŘÍRUČKA UČITELE
8. třída		díl D	
září	Zlomky	5	124
	Množiny	7	126
	Rodina	11	129
	Trojúhelník I	14	132
říjen	Záporná čísla	17	135
	Dělitelnost	20	138
	Trojúhelník II	23	141
	Jazyk písmen I	25	143
listopad	Geometrické místo bodů	27	146
	Desetinná čísla	30	149
	Aritmetický průměr	32	151
písemná práce			
	Kružnice	35	154
prosinec	Procenta	38	157
	Trojúhelník III	41	159
	Rovnice	44	162
	Jazyk písmen II	47	165
leden	mky	50	168
	Prvočísla I	53	172
	Mocniny	55	174
písemná práce			
	Oblé tvary	57	176
	Zápis čísla	60	178
únor	Úměrnosti	64	181
	Prvočísla II	67	184
	Číselná osa	69	186
březen	Podobnost	72	188
	Lineární funkce	75	191
	Trojúhelníková nerovnost	79	194
		díl E	
duben	Odmocniny	7	24
	Trojúhelník I	10	27
květen	Rovnice I	13	30
	Množiny II	15	32
červen	Pravděpodobnost	17	34
	Výrazy	20	37
písemná práce			

1 Předpokládáme, že žáci budou počítat postupně délky přepon pravouhlých trojúhelníků. První délka je $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, druhá $\sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{11}$, třetí $\sqrt{11^2 + 1^2} = \sqrt{12}$, čtvrtá $\sqrt{12^2 + 1^2} = \sqrt{13}$ atd. Po několika výpočtech si možná některý žák uvědomí, že počítá „pořád totéž dokola“ a že výpočet lze vlastně urychlit:

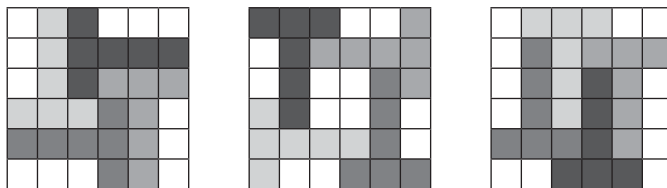
$\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 4$. Výsledek může být překvapivý.

Úloha zároveň dává návod, jak narýsovat úsečku délky \sqrt{n} pro jakékoli přirozené n .

Výsledek: Otazník je 4.

2 Úlohu lze využít i pro připomenutí středové souměrnosti.

Výsledky:



Trojúhelník

Úvodní text shrnuje dříve získané poznatky o trojúhelníku. Uvádíme odkazy na strany v učebnici, kde žáci učili příslušné objevy:

- obsah: díl C, strana 58;
- Pythagorova věta: díl C, strana 75;
- trojúhelníková nerovnost: díl D, strana 79;
- těžnice: díl C, strana 34;
- osy úhlů: díl D, strana 42;
- osy stran: díl D, strana 16.

V dílu E na straně 51 čeká ještě tvrzení o ortocentru – tři výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě, ortocentru H .

1 Úlohy **a), b), c), d)** jsou seřazeny tak, aby je žák mohl postupně řešit. Například spočítat ihned výšku CD by bylo těžké. Ovšem pokud předtím v úloze **b)** zjistíme obsah, úlohu lze vypočítat a řešení je na dosah.

Hlavním cílem úlohy je několikanásobné použití Pythagorovy věty.

V úloze **b)** asi někteří žáci napíšou $S = \frac{1}{2}ab$ a jiní budou chtít počítat S jako $\frac{1}{2}cv_c$, což jim ale nepůjde, neboť v_c neznáme. Ale když jsme zjistili S , tak výšku $v_c = |CD|$ lze spočítat právě z rovnosti $S = \frac{1}{2}cv_c$.

Pokud některý žák bude úlohu řešit s využitím podobných trojúhelníků, dáme mu prostor. Žáci se s touto situací setkali už v učebnici B na straně 71 (úloha 3) a také v učebnici D na straně 74 (úloha 5).

Výsledky: **a)** $a = 15$, **b)** $S = \frac{1}{2}ab = 150$, **c)** $|CD| = \frac{2S}{c} = 12$, **d)** $|AD| = 16$, $|BD| = 9$.

TROJÚHELNÍK I

Trojúhelník je jeden z nejdůležitějších aktérů rovinné geometrie. O něm už víme, že:

- obsah $S = \frac{1}{2}av_a$ (lidově $\frac{1}{2}$ · strana · výška);
- v pravouhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta;
- platí trojúhelníková nerovnost $a < b + c$ (každá strana je kratší než součet zbylých dvou);
- tři těžnice se protínají v jednom bodě, těžišti T ;
- těžiště dělí každou těžnici v poměru 2:1;
- osy úhlů se protínají v bodě I , středu kružnice trojúhelníku vepsané;
- osy stran se protínají v bodě O , středu kružnice trojúhelníku opsané.

1 Pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou $c = 25$ má odvěsnu $b = 20$. Zjistěte:

- délku odvěsny a
- obsah S trojúhelníku ABC
- délku výšky CD
- délky úseček AD a BD .

2 Na obrázku vlevo je čtverec a rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník (C je střed strany a D je střed čtverce). Na obrázku vpravo je čtverec a rovnostranný trojúhelník. Zjistěte obsah trojúhelníků ABC , ABD , ABE , jestliže $|AB|$ je: **a)** 2 cm, **b)** a . Zjistěte obsah trojúhelníku ABF , jestliže $|AB| = a$.

10
TROJÚHELNÍK I

Kvadratické výrazy

Obtížnost 1,2

1 Cílem úlohy je, aby si třída připomněla efektivní způsob pro výpočet středového čísla. Žáci už měli několik příležitostí jej objevit, případně jej ještě připomíná Kira v modře podbarveném textu.

Úlohu **a)** je možné vyřešit i experimentováním. Třída přijde na to, že řešení je více a v každém z nich je součet doplněných rohových čísel 7. U třetí úlohy si uvědomíme, že prvočíselný rozklad čísla 91 je $7 \cdot 13$.

Výsledky: První čtverec – součet hledaných rohových čísel je 7. Úloha má 7 řešení (nebo 8, jestliže i nulu považujeme za přirozené číslo).

Druhý čtverec – v levém rohovém poli je 0, 2 nebo 6; v pravém pak 19, 5 nebo 1.

Třetí čtverec – v pravém dolním poli je 3 a součet dvou zbylých rohových čísel je 7.

1,2

2 V této i v dalších třech úlohách využíváme návod Kiry.

Výsledky: Čtvrté rohové číslo je: v prvním čtverci $\frac{1}{2}$; ve druhém čtverci $\frac{3}{7}$; ve třetím čtverci 0,42.

1,2

3 Důsledkem vztahu $S = (a + c)(b + d)$ je tvrzení: $S = 0 \Leftrightarrow (a + c = 0 \text{ nebo } b + d = 0)$. Cílem úlohy je, aby si žáci toto poznání dobře uvědomili.

Výsledky: První čtverec: $x = 6$ nebo -1 ; druhý čtverec: $x = 7$ nebo 3 ; třetí čtverec: $x = -5$ nebo -8 .

1,2

4 Nejdříve doplníme výrazy do modrých rohových polí a do žlutých polí. Následně výrazy ve žlutých polích sečteme. Případně po doplnění modrých polí lze použít vztah $S = (a + c)(b + d)$ a pak závorky roznásobit.

Výsledky: První čtverec – scházející rohový výraz je x , $S = x^2 + 7x + 12$; druhý čtverec – scházející rohové výrazy jsou 5 (horní) a x (dolní), $S = x^2 + 3x - 10$; třetí čtverec – scházející rohové výrazy jsou -1 (horní) a x (dolní), $S = x^2 - 4x + 3$; čtvrtý čtverec – scházející rohové výrazy jsou 5 (levý horní), 3 (pravý horní) a x (dolní), $S = x^2 + 8x + 15$.

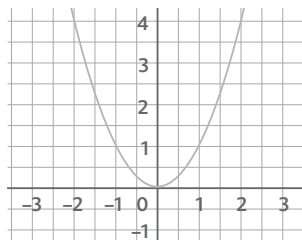
1,2

5 Grafem kvadratického polynomu je parabola. Úloha uvádí nejjednodušší případ, graf funkce $y = x^2$. Cílem úlohy je, aby se žáci seznámili s tvarem paraboly a uvědomili si její osovou souměrnost.

Výsledky: **a)**

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,4	2
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	1,96	4

b)



6 Když žák úrovně [1] uvidí řešení jedné z úloh, bude asi schopen sám vyřešit další. 1,2

Výsledky: **a)** $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, **b)** $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, **c)** $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$.

7 Výsledky: **a)** $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, **b)** $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, **c)** $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, **d)** $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. 1,2

Žákům úrovně [3, E] může dát učitel náročnější úlohy:

1) Kvadratická rovnice má dva kořeny, které označíme x_1 a x_2 . Známe x_1 , najděte x_2 .

$\frac{-x^2}{1}x$

KVADRATICKÉ VÝRAZY

1 Vyřešte v přirozených číslech. Hledejte více řešení.

		1
21		
2		

2		1
21		

		10
91		

Kira již u úlohy 4 z kapitoly Jazyk písmen odhalila skvělý trik.

JÁ SEČTU $a+c$,
PAK $b+d$ A TY DVA
SOUČTY VYNÁSOBÍM-
MÁM TO S .

a	$-b$
S	
d	$-c$

Vztah $S = (a + c)(b + d)$ můžete ověřit na následujících úlohách.

2 Vyřešte. Snažte se řešit bez tužky a papíru.

		$\frac{2}{3}$
1		
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$

		$\frac{3}{5}$
1		
$\frac{2}{5}$		$\frac{4}{7}$

		0,4
1		
0,6		-0,58

40
KVADRATICKÉ VÝRAZY

Bod

- Číselné osy F: 5, 6
- Mříže
 - čtvercové E: 28, 29, 35, 38, 50, 51, 78, 79; F: 6, 17, 19, 41, 52
 - trojúhelníkové E: 38, 39
- Roviny E: 10, 32, 34, 38, 39, 50, 51, 55, 62, 65, 69, 72, 76, 77; F: 9, 11, 17, 18, 19, 20, 26, 35, 36, 37, 43, 44, 45, 46, 55, 60, 62, 69, 70, 71
- Sféry E: 35, 65; F: 52
- Třetinový F: 43, 44

Cavalieriho princip

- E: 5, 24, 25, 68, 69; F: 32

Číslo

- Celá E: 8, 27, 31, 42, 47, 49, 73; F: 15, 27, 29, 33, 34
- Čtyřmístné E: 18, 45, 57; F: 7, 8
- Desetinné E: 6, 19, 21, 40, 41, 42, 43
- Dvoumístné E: 18
- Kladné E: 6, 26
- Liché E: 45, 46, 56; F: 65
- Ludolfovo E: 8, 12, 67; F: 30, 31, 71, 76, 79
- Nezáporné E: 20
- Osy F: 5, 6
- Pětimístné E: 69; F: 8
- Posloupnosti E: 47; F: 15, 24, 25
- Přirozené E: 8, 9, 16, 19, 27, 41, 44, 45, 70, 72; F: 13, 14, 15, 38, 39, 40, 53
- Racionální E: 8, 9, 26, 40, 41, 42; F: 5, 6, 7, 8, 14, 27, 33, 34, 39
- Římské E: 22, 29; F: 34
- Sudé E: 18, 44, 46; F: 8, 65
- Trojmístné E: 45; F: 7, 8
- Zrcadlové E: 45

Čísllice

- E: 18, 19, 22, 40, 42, 45, 69; F: 7, 8, 29

Čtverec

- E: 7, 9, 10, 12, 14, 16, 30, 31, 32, 33, 37, 39, 47, 48, 57, 72, 73, 74, 79; F: 20, 21, 23, 25, 28, 32, 36, 37, 42, 43, 44, 46, 63, 73, 75, 77, 78
- Součinný F: 38, 40, 41, 56, 57, 58
- Čtyřúhelník E: 16, 65; F: 9, 10, 11, 19, 46, 61, 63, 71, 72, 73, 74
- Mřížový F: 19
- Tečnový F: 10, 63, 74

- Tětivový F: 19, 61, 62, 63, 72, 74

Dělitelnost

- E: 16, 18, 32, 45, 46, 47, 57, 58, 59; F: 7, 8, 38, 39

Diagram

- Sloupcový E: 43; F: 5, 65
- Vennův E: 15, 16
- Vývojový E: 58

Funkce

- E: 78, 79; F: 50, 51, 52

Graf

- Funkce E: 78, 79; F: 50, 51, 52
- Sloupcový E: 43; F: 5, 65

Geometrické místo bodu

- E: 39, 76, 77; F: 44

Hranol

- E: 68; F: 75
- Čtyřboký E: 24; F: 23
- Šestiboký E: 23

Jehlan

- E: 68; F: 75
- Čtyřboký E: 24, 25
- Šestiboký E: 25

Koeficient

- Podobnosti E: 61
- Stejnolehlosti F: 44, 45, 46, 65

Kolmice

- E: 50, 51, 72; F: 36, 62

Kolmost

- E: 24, 38, 69, 77; F: 9, 19, 32, 36, 52, 63, 73, 75

Kombinatorika

- E: 48, 55, 56; F: 53, 54, 55

Konstrukce

- Bodu E: 34, 35, 51; F: 26, 36, 43, 44, 45
- Čtverce E: 39; F: 44
- Čtyřúhelníku F: 9
- Kosočtverce E: 76
- Kružnice E: 51; F: 18, 19, 36
- Lichoběžníku F: 19
- Obdélníku E: 29, 62
- Osy
 - strany E: 10, 51, 76, 77; F: 19, 69
 - úhlu E: 10, 11, 12, 77; F: 9, 10, 11, 19, 61, 62, 69